**Міністерство освіти і науки України**

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ “КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”**

**Кафедра прикладної математики**

**ЕТАП №2**

«Вивчення методу розв’язування задачі

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ»

з дисципліни: «Програмування» 1-й семестр

на тему: «Програма обчислення визначених

інтегралів за квадратурними формулами (формули Сімпсона)»

Виконав: Хавронюк Богдан Андрійович

Група КМ-02, факультет ФПМ

Керівник: Олефір О.С.

Київ-2020

**Програма обчислення визначених інтегралів за квадратурними формулами (формули Сімпсона)**

**Інтегра́л** — центральне поняття інтегрального числення, узагальнення понят тя суми для функції, визначеній на континуумі. виникає під час розв'язування за дач про знаходження площі кривої, знаходження пройденого шляху при не рівномірному русі та інших подібних задачах.

**Ви́значений інтегра́л** — в математичному аналізі це інтеграл функції з вказа ною областю інтегрування. визначений інтеграл є неперервним функціоналом, лінійним по підінтегральним функціям і адитивним по області інтегрування. у найпростішому випадку область інтегрування — це відрізок числової осі. гео метричний зміст визначеного інтеграла — це площа криволінійної фігури (криволінійної трапеції), обмеженої віссю абсцис, двома вертикалями на краях відрізка і кривою графіка функції.

**Чисельне інтегрування функцій**

Якщо для визначеної і неперервної на проміжку [а;b] функції f(x) відома пер вісна F(х), то визначений інтеграл можна обчислити за формулою

Ньютона-Лейбніца:

Проте в багатьох випадках обчислити визначений інтеграл за цією формулою не можливо, оскільки знайти первісну F(x) через елементарні функції, як правило, не вдається. Навіть тоді, коли її можна визначити, вона часто має досить склад ний і незручний для обчислень вигляд. Крім того, на практиці підінтегральна функція часто задається таблично і в такому разі аналітичні методи просто незастосовні. У цих випадках для обчислення визначених інтегралів кори стуються чисельними методами. Чисельне інтегрування – це обчислення значен ня визначеного інтеграла через ряд значень підінтегральної функції та її по хідних.

Оскільки знаходження числового значення визначеного інтеграла (якщо *f*(*x*)>0) з геометричного погляду можна тлумачити як обчислення площі криволінійної трапеції (її квадратури), обмеженої віссю Ox, прямими *x*=*a*, *x*=*b*, і лінією *y*=*f*(*x*), то формули для наближеного обчислення визначеного інтеграла називаються квадратурними.

Для побудови квадратурних формул можна використати інтерполяційний мно гочлен, а саме: підінтегральну функцію *y*=*f*(*x*) на відрізку інтегрування замінити інтерполяційним многочленом *Pn*(*x*) і вважати, що інтеграл від інтерполяційного многочлена наближено дорівнює інтегралу від заданої функції

Якщо для інтерполяційного многочлена відомий залишковий член *Rn*(*x*)=*f*(*x*)-*Pn*(*x*), то можна дістати вираз для залишкового члена квадратурної

формули , тобто залишковий член квадратурної формули дорівнює інтегралу від залишкового члена інтерполяційного многочле на.

**Квадратурні формули Ньютона-Котеса** : Розглянемо інтерполяційні квадратурні формули, в яких вузли *xk*Î[а;b] рівновіддалені. Такі формули нази ваються формулами Ньютона-Котеса. Їх вперше розглянув Ньютон, а коеф іцієнти для них при *n*≤9 знайшов Котес. Дослідження таких, формул показали,

що коли *n*≥10, то серед коефіцієнтів *Ak*є від’ємні і . Отже, при ве ликих n похибка квадратурної суми буде великою навіть при малих похибках в значеннях функції *f*(*xk*). Тому на практиці квадратурні формули Ньютона-Котеса

для великих n не використовуються. Розглянемо частинні випадки формул Нью тона-Котеса.

Вважатимемо, що для формул Ньютона-Котеса, які містять не менш як два до данки (*n*≥1), вузли *xk*розміщено такі що *x*0=*a*, *xn*=*b*, *xk*+1=*xk*+*h* (*k*=0,1,…,*n*-1).

Крок *h* в даному випадку дорівнює . У випадку *n*=0 за єдиний вузол *x*0 можна взяти будь-яку точку на відрізку [*а*;*b*].

**Квадратурна формула Сімпсона.** Розглянемо ще один приклад квадратурної формули Ньютона-Котеса, яка широко використовується на практиці і називаєть ся квадратурною формулою парабол, або формулою Сімпсона. Цю формулу

дістанемо з (2), (3), якщо *n*=2. Вузлами тут є точки *x*0=*a*, , *x*2=*b*. Знайде мо коефіцієнти формули.

;

;

.

Таким чином, формула Сімпсона має вигляд:

(8)

У випадку додатної функції f(x) формула (8), як бачимо, зводиться до того, що

інтеграл наближено замінюється площею фігури; яка обмежена віссю Ох, прямими *х*=*а* і *х*=*b* і параболою, що проходить через точки (*a*;*f*(*a*)),

, (*b*;*f*(*b*)).

**Узагальнена формула Сімпсона.** Якщо відрізок [*а*;*b*] великий, то його ділять на парну кількість 2*m* рівних частин: [*x*0;*x*1], [*x*1;*x*2], ..., [*x*2*m*-1;*x*2*m*] зав

довжки (тут *x*0=*a*, *x*2*m*=*b*) і до кожних двох сусідніх відрізків завдовжки

2*h* застосовують формулу Сімпсона (8). Тоді

або

(9)

де *yi*=*f*(*xi*), . Формула (9) називається узагальненою формулою Сімпсона, або формулою парабол.

**Оцінка похибки чисельного інтегрування**

Однією з характеристик квадратурної формули є оцінка її залишкового члена. За нею можна визначити, яка з квадратурних формул точніша для даного класу функцій.

Гранична абсолютна похибка результату включає залишковий член квадратурної формули, похибку зумовлену неточністю значень підінтегральної функції і за ключну похибку округлення. Якщо значення підінтегральної функції в усіх точ ках обчислюється з однаковою точністю, то похибка обчислень стала. Тоді по хибка, зумовлена неточністю підінтегральної функції, обчислюється за форму лою ∆*f*(*b*-*a*).

**г**ранична абсолютна похибка значення інтеграла, обчисленого за квадратурною

формулою Сімпсона , дорівнює **:**

де, , , ∆0– похибка остаточного округлення ре зультату.

Іноді оцінити залишковий член квадратурної формули дуже важко або й немож ливо, наприклад тоді, коли функцію задано таблично і аналітичний вираз її не відомий, або коли функцію задано складним аналітичним виразом і її похідні важко оцінити. Тоді використовують методи подвійного перерахунку, які пере-

дбачають двічі обчислювати означений інтеграл, але при різних *h*. Якщо резуль тати практично рівні, то можна вважати, що обчислення проведено правильно і за остаточний результат взяти значення, обчислене при меншому кроці, а за по хибку – різницю між одержаними значеннями.